Банк задач

Вероятность

1) На выборах президента страны N кандидаты А, Б и В набрали некоторое количество голосов, причём среди голосовавших на выборах - 40% мужчин. Известно, что за каждого кандидата голосовали хотя бы 1 мужчина и 1 женщина. Также известно, что за кандидата В проголосовало в два раза меньше людей, чем за кандидатов А и Б в сумме. Распределение голосов мужчин у всех кандидатов отдельно следующее: за А – 10%, за Б – 50%, за В – 40%. Найдите вероятность того, что случайно выбранный избиратель проголосовал за кандидата А.

2) В трёхмерном пространстве расположен прямоугольный параллелепипед, в который вписана фигура Ф, являющаяся объединением двух равных сфер с единичным радиусом, касающихся друг друга в центре параллелепипеда. Найдите вероятность того, что случайно выбранная точка внутри параллелепипеда будет также находиться внутри фигуры Ф.

3) Артём обводит строго по границам клеток на клеточном поле 10x10 случайный прямоугольник. Найдите вероятность того, что он обведёт квадрат с единичной стороной.

4) Настя написала на доске всевозможные представления числа 1024 в виде произведения двух натуральных множителей (представления, отличающиеся перестановкой, считаются одинаковыми). Найдите вероятность того, что в случайно выбранном представлении сумма множителей больше тысячи.

5) Михаил задал в пространстве 10 точек так, что любые три точки не лежат на одной прямой, и соединил отрезками каждую точку с каждой. Среди всех точек есть точки A и B. Найдите вероятность того, что случайно выбранным отрезком будет отрезок AB.

6) Артём хочет написать строку из трёх “(” и трёх “)” так, чтобы каждая открытая скобка в итоге закрывалась, например так: “()()()”, но не так: “)()()(”. Какова вероятность того, что Артём составит строку “()()()”?

7) На координатной плоскости заданы фигуры А и Б следующим образом:

$$\text{А} = \begin{cases} 0 \le y \le 5 - x \\ x \ge 0 \end{cases}, \qquad \text{Б} = \begin{cases} (x + y)(x - y) \le 0 \\ 0 \le y \le 5 \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что случайно взятая точка в объединении этих фигур будет находиться в их пересечении.

8) Никита разбивает отрезок длиной 10 клеток на три отрезка с целыми длинами двумя чертами. Какова вероятность того, что все отрезки будут разной длины?

9) Вячеслав написал на доске такие три приведенных квадратных трёхчлена, что сумма любых двух из них не имеет корней. Найдите вероятность того, что сумма всех трёх многочленов имеет корни.

10) Случайная величина X принимает любые натуральные значения. Функцией распределения случайной величины является

$$P(x)=\begin{cases} -\frac{x^2}{10}+\frac{3x}{5}-\frac{1}{2},\ x\in[1;5] \\ \max(0,-2^{1024}x^2+2^{1025}x-2^{1026}),\ x\notin[1;5] \end{cases}.$$

Найдите модуль разности сумм вероятностей чётных и нечётных чисел.

11) Артём выбирает случайное натуральное число, не большее 100. С какой вероятностью выбранное число будет палиндромом? (Палиндром – число, которое при отражении своих цифр относительно середины переходит само в себя)

12) В психбольнице с безумно большим конечным числом пациентов каждый пациент проходит тест на вменяемость, который оценивается целым числом баллов от 0 до 10. Персонал клиники выяснил, что от 0 до 5 баллов включительно вероятность растёт на одну и ту же величину по сравнению с предыдущей, а с 5 до 10 баллов падает на эту же величину, причём вероятности нулевого и десятибалльного результата одинаковы. По результатам теста пациента причисляют к определенному уровню организации личности: меньше 3 баллов – “психотический”, от 3 до 7 включительно – “пограничный”, а все остальные причисляются к “невротическому” уровню. Также известно, что из всех пациентов клиники к пограничному уровню было причислено 63% пациентов. Найдите вероятность попадания человека в категорию “психотического” уровня.

13) Исполнитель Черепаха, расположенный на координатной плоскости в начале координат за 1 шаг с одинаковой вероятностью поворачивается либо на 45° вправо, либо на 45° влево, и затем всегда передвигается вперед на некоторый единичный отрезок, оставляя за собой след. С какой

вероятностью Черепаха нарисует правильный восьмиугольник за 8 шагов?

14) Среди всех пациентов клиники с диагностированным биполярным расстройством личности (БАР) 40% страдает расстройством 1 типа, у остальных диагностирован 2 тип. Известно, что БАР обоих типов часто коморбидно с пограничным расстройством личности (ПРЛ): ПРЛ диагностируется у 75% болеющих БАР 2 и у 25% болеющих БАР 1 типа. Найдите вероятность того, что у больного БАР будет диагностировано ПРЛ.

15) Артём написал на доске натуральные числа от 1 до 100 включительно, а затем случайным образом вычеркнул два из них. С какой вероятностью модуль разницы вычеркнутых чисел равен 90?

16) Артур выбирает случайное число от 1 до 10. С какой вероятностью случайно выбранное число будет иметь чётное количество делителей?

17) У Арсения в плейлисте собрано 10 песен. При перемешивании песен порядок песен в очереди выставляется совершенно случайным образом. Арсений включил случайную песню плейлиста с включённой функцией перемешивания очереди. Найдите вероятность того, что первые две песни в плейлисте сохранят свою позицию при перемешивании и будут первыми двумя в очереди.

18) С какой вероятностью в случайную минуту суток на электронных часах часы вместе с минутами образуют число-палиндром? (например, 11:11 или 23:32)

19) Стрелок стреляет по мишеням. Если стрелок попадает ровно в центр мишени, то стрелок получает 2 балла, если он попал в мишень, но не в центр – 1 балл, а если промахнулся – лишается одного балла, если у него до этого уже были баллы. Вероятность попадания стрелка в центр мишени при каждом отдельном выстреле равна 0.1, а вероятность промаха – 0.5. Стрелок по очереди стреляет по пяти мишеням. Найдите вероятность того, что он получит 5 баллов в сумме.

20) Нейросети скармливают фотографии животных. Нейросеть угадывает кошку на фотографии в половине случаев, а собаку лишь в четверти. В определенный момент нейросети скормили пять фотографий: под чётными номерами были кошки, а под нечётными –

собаки. С какой вероятностью нейросеть угадает животное хотя бы на одной фотографии?

21) Известно, что в случайный летний день вероятность дождя – 0.2, вероятность сильного ветра – 0.4, также возможен случай обоих явлений с вероятностью 0.05. Найдите вероятность того, что в случайный летний день будет отличная погода.

22) После того, как Иван Валериевич Ященко дал на основной волне ЕГЭ по профильной математике 27 мая 2025 года самый отборный калл во второй части, вероятность подрыва здания ФИПИ увеличилась на 0.5, и теперь она в сумме с предыдущей составляет единицу. Найдите вероятность подрыва здания ФИПИ после шутки Ященко.

23) Артём составляет пятибуквенные слова из букв А, Б, В, Г и Д. С какой вероятностью Артём составит слово, буквы в котором будут идти в алфавитном порядке?

24) Артём составляет шестибуквенные слова из букв АБВГДЕ. С какой вероятностью в слове сначала будут идти гласные, а потом согласные буквы?

25) До взрыва бомбы некоторое количество секунд. Известно, что бомба взорвётся в первую секунду с вероятностью q, а в каждую следующую секунду вероятность растет в два раза. В какую секунду бомба гарантированно взорвётся, если $q > 0{,}05$?

26) Никита закрашивает клетки таблицы 3х3 в случайный цвет (красный или синий). С какой вероятностью вся таблица будет красной после закрашивания всех клеток?

27) Агрофирма выращивает морковь. Вероятность того, что случайная морковь будет меньше 8 см в длину равна 0.1, а вероятность того, что будет больше 15 см равна 0.2. С какой вероятностью длина моркови будет от 8 до 15?

28) На доске написан ноль. Артём за один ход стирает число на доске и вместо него пишет либо число на 1, либо на 2 больше. В итоге Артём получил число 4 на доске и прекратил этим заниматься. С какой вероятностью Артём писал только чётные числа на протяжении всего процесса?

29) На вечеринке 10 друзей, в том числе Артём. Друзья купили один торт и хотят его разрезать на 12 кусочков и их раздать так, чтобы у каждого был хотя бы 1 кусок, а дополнительные раздать случайным образом. С какой вероятностью Артём получит 2 дополнительных куска?

30) В некоторой группе из 10 человек каждый знаком с пятью другими людьми. С какой вероятностью пара случайных людей знакомы?

31) В произвольном треугольнике ABC провели все три средние линии, образовавшие треугольник MNK. С какой вероятностью случайно выбранная точка внутри треугольника ABC будет лежать внутри треугольника MNK?

32) В таблице 10x10 закрасили одну случайную клетку красным, а затем отрезали от неё несколько случайных прямоугольников с суммарной площадью в 75 клеток. С какой вероятностью красная клетка будет отрезана?

33) Миша рассматривает шестиэлементное множество целых неотрицательных чисел, дающих всевозможные остатки при делении на 6. С какой вероятностью сумма двух случайных элементов будет делиться на 6?

34) Случайные 5 клеток клеточного поля 5x5 заминировали. С какой вероятностью будет заминирована ровная линия из 5 клеток?

35) Артём выбирает случайное число от 1 до 1000 включительно. С какой вероятностью он выберет число, делящееся на 228?

36) Артём выбирает два случайных различных числа от 1 до 10. С какой вероятностью он выберет два взаимно простых числа?

37) Цвет пикселя на мониторе составляется из трёх цветовых каналов: красного, зелёного и синего. Интенсивность каждого из каналов измеряется целым числом от 0 до 255 включительно. С какой вероятностью при генерации случайного набора каналов значения всех трех каналов будут чётны?

38) На карточках написаны числа от 1 до 100, на 1 карточке 1 число. На обратной стороне карточки маркером оставляют красную полоску, если число четное, зеленую, если делится на 3, и синюю, если делится на 5. С какой вероятностью на случайно взятой карточке будут три полоски?

39) На доске написаны числа от 1 до 5. С какой вероятностью случайно взятая тройка чисел будет являться сторонами прямоугольного треугольника?

40) На доске написаны числа от 1 до 10. С какой вероятностью случайно взятое число является биномиальным коэффициентов (является числом сочетаний / встречается в треугольнике Паскаля)?

41) На доске написаны числа от 1 до 10. С какой вероятностью случайно взятое число будет являться одним из коэффициентов в разложении $(x+1)^5$?

42) На доске написано предложение: “Осень, лето, весна и зима — это времена года”. Случайно взятую букву зачеркивают. С какой вероятностью зачеркнута будет гласная буква?

43) В классе из 9 человек каждый ученик дружит со всеми остальными. В определенный момент ровно 9 пар учеников ссорятся. С какой вероятностью случайно взятая пара учеников дружит?

44) Никита выигрывает у Саши поединок в армрестлинге с вероятностью 0.7, а Вячеслав побеждает Сашу с вероятностью 0.6. С какой вероятностью и Никита, и Вячеслав проиграют Саше?

45) Ященко с вероятностью 0.3 даёт на ЕГЭ 2030 по профильной математике сложный вариант, а с вероятностью 0.4 - очень простой. С какой вероятностью он даст вариант средней сложности?

46) Никита переставляет буквы в слове ИКИТНА. С какой вероятностью он составит из них своё имя?

47) Артём рассматривает функцию f = 123456789x + 1 на множестве натуральных чисел от 1 до 100. С какой вероятностью значение функции в случайной точке на указанном отрезке чётно?

48) Артём рассматривает набор функций:

$$f_1(x) = |x| + 1, f_2(x) = \sin x\,, f_3(x) = \cos x\,, f_4(x) = \int_0^{|x|} 1dt$$

С какой вероятностью случайно выбранная $f_i(x)$ будет четной?

49) Используя четную $f(x)$ и нечетную $g(x)$, Артём ввёл ряд функций:

$$h_1(x) = f(x) \cdot g(x), h_2(x) = f(x) + g^2(x),$$

$$h_3(x) = 3f^2(x) + 100g(x), h_4(x) = f^2(x) + |g(x)|,$$

С какой вероятностью случайно выбранная $h_i(x)$ будет четной?

50) У Маши есть 3 пирожка и 4 друга. Она случайно раздает пирожки друзьям, причём может быть такое что все три пирожка получил один друг. Какова вероятность такого исхода?

51) Квадрат разбит на 10 частей равной площади, причём шесть случайных частей раскрасили в зеленый, а остальные в красный. Во сколько раз вероятность случайно взятой точки внутри квадрата на зеленую область больше вероятности попадания точки на красную область?

52) Юрий случайно выбирает пятерку различных натуральных чисел от 1 до 100 включительно. С какой вероятностью числа дают всевозможные остатки при делении на 5?

53) Артур бросает кубик k раз. Найдите максимальное k, при котором вероятность суммы выпавших очков равной $k \geq 0{,}01$.

54) Артём зачеркивает одну случайную букву в слове ШАРОМЫЖНИК. С какой вероятностью будет зачеркнута гласная буква?

55) Артём составляет шестибуквенные слова из букв АБВУ. С какой вероятностью как минимум половина букв в слове будут гласными?

56) В единичном правильном шестиугольнике случайно соединили две случайных несмежных вершины. С какой вероятностью длина проведенного отрезка больше корня из трех?

57) Артём рассматривает строго монотонно убывающую функцию $f(x)$ на отрезке [0;1], график которой проходит через (0;1) и (1;0). Артём случайно выбирает 100 точек на графике функции, принадлежащих интервалу (0;1). С какой вероятностью длина отрезка, проведенного между двумя любыми искомыми точками больше корня из двух?

58) На планете N есть только ясная и дождливая погода. Известно, что если вероятность дождя в некоторый день равна p и дождь пошёл, то на следующий день вероятность дождя будет уже $p/2$, а если дождя не будет, то на следующий день он пойдет с вероятностью $5p/4$. Пусть 1 июля вероятность дождя - $1/2$. С какой вероятностью среди 1, 2, 3 и 4 июля дождь пойдет ровно в двух днях?

59) Артём нарисовал окружность, провёл диаметр и случайно отметил на окружности две точки, не совпадающие с концами диаметра. С какой вероятностью хорда с концами в этих точках пересечет диаметр?

60) Учёный изучал звезды на небе и решил спроецировать их на плоскость с декартовой системой координат. На плоскости образовалась тройка кластеров звёзд в виде плотных кругов из точек с количеством звёзд 256, 351 и 386 соответственно в каждом. Также учёный заметил 7 звёзд, находящихся на большом расстоянии от кластеров, их он назвал одинокими. С какой вероятностью случайно взятая звезда не будет одинокой?

61) Илья выбирает случайное число от 1 до 100 включительно. С какой вероятностью оно будет делиться на 4 или давать единичный остаток при делении на 8?

62) Назовём треугольным такое число x, для которого $8x + 1$ будет являться полным квадратом некоторого натурального числа. Кирилл выбирает случайное число от 1 до 100 включительно. С какой вероятностью оно будет треугольным?

63) Назовём пятиугольным такое число, которое может быть значением функции $f(n) = \frac{3n^2-n}{2}$ каком-либо натуральном n. Валерия выбирает случайное число от 1 до 100 включительно. С какой вероятностью оно будет пятиугольным?

64) С какой вероятностью в случайную минуту суток на электронных часах будет отображаться полный квадрат? (Например, 0:09, 4:41, 23:04)

65) Никита рассматривает натуральные значения функции $\varphi(x) = 5x^2 - 4x$ при натуральных x на отрезке [1;100]. С какой вероятностью при случайном выборе значения аргумента $\varphi(x)$ оканчивается на x?

66) В игре Minecraft курица даёт яйцо в конкретную секунду с вероятностью 0.01, но у курицы есть перерыв между яйцами в 1 минуту. С какой вероятностью курица даст 3 яйца за 3 минуты 2 секунды?

67) Известно, что в единственной строке файла F буква А встречается 10 раз, буква Б - 101, буква В - 1000 раз, других букв в строке нет, а длина строки - 10000. С какой вероятностью случайно выбранный символ является буквой?

68) Евгений выбирает случайное натуральное число от 0 до 99 включительно. С какой вероятностью оно будет давать чётный остаток при делении на 5?

69) Тимофей выбирает случайное натуральное число от 1 до 100 включительно. С какой вероятностью его сумма цифра равна 7?

70) Никита на клеточном поле 3x3 проводит отрезок с концами в узловых точках, не параллельный сторонам поля. С какой вероятностью длина отрезка будет меньше 3 корней из 2?

71) Андрей рассматривает случайный год от 2001 до 2025 включительно. С какой вероятностью он будет високосным?

72) Роман рассматривает натуральные делители числа 2025. С какой вероятностью случайно выбранный делитель будет делиться на 5?

73) Ангелина выбирает случайное натуральное число от 1 до 100 включительно. С какой вероятностью сумма всех его простых делителей чётна?

74) Пусть X - случайная величина, равновероятно принимающая значения 1, 2, 3 и 9. Найдите значение выражения

$$\Big(20P\big(X = P(P(X = 10) = 0)\big)\Big)!$$

75) A, B и C - некоторые события, причем $P(A) + P(B) + P(C) = 1$. Известно, что $P(A \text{ или } \mathrm{B}) = 0.2$, а $P(\mathrm{B} \text{ или } \mathrm{C}) = 0.4$. Найдите значение выражения $P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

76) В двух торговых центрах, расположенных на разных концах большого города, стоит по одному банкомату. Известно, что к концу дня деньги заканчиваются в каждом из банкоматов с разной вероятностью вследствие разной плотности населения и других факторов. Известно также, что к концу дня деньги закончатся в обоих банкоматах с вероятностью 0.42, а останутся с вероятностью 0.52. Найдите сумму вероятностей израсходования денег в каждом банке в отдельности.

77) Некоторая организация проводит гонки улиток, на которых каждый желающий может поставить деньги только на выигрыш одной конкретной улитки в каждой отдельной гонке. Всего на турнире 17 июля будет 5 гонок и 5 одинаковых улиток на каждой. Перед самыми первыми гонками на турнире организация показывает коэффициент каждой

улитки, не меняющийся в течении турнира, на который при победе улитки поставленные деньги умножатся. Перед началом турнира коэффициенты улиток выглядели так:

№ улитки	1	2	3	4	5
Коэффициент	1,8	1,4	1,9	1,2	1,5

Известно, что коэффициент напрямую связан с вероятностью выигрыша следующим образом:

$$\text{Коэффициент} = 2 - \text{вероятность}$$

Павел хочет поставить свои деньги следующим образом: в k-ой гонке он ставит на победу k-ой улитки, причем во всех ставках ставит одну и ту же сумму. С какой вероятностью Павел полностью прогорит?

78) Назовём всю декартову плоскость **полем**, а каждую целочисленную точку **цветком**. Введём функцию $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, перемещающую пчелу с некоторого цветка на случайный цветок, находящийся на расстоянии от предыдущего не более чем в 5 единичных отрезков, причём перемещение также может и не совершиться и все места для перемещения равновероятны. В начальный момент пчела сидит на цветке с координатами (1; 1). С какой вероятностью после выполнения функции пчела окажется на цветке с положительными координатами?

79.1) Назовём всё множество натуральных чисел **полем**, а каждое число **цветком,** причём число 1 – первый цветок, 2 – второй и т.д.. Введём функцию $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, перемещающую пчелу с некоторого цветка на случайный цветок, находящийся на расстоянии от предыдущего не более чем в 5 цветков, причём все места для перемещения равновероятны и после каждого перемещения расстояние между пчелой и первым цветком не уменьшается. В начальный момент пчела сидит на первом цветке. С какой вероятностью после трёх выполнений функции пчела окажется на тринадцатом цветке?

79.2) Назовём всё множество натуральных чисел **полем**, а каждое число **цветком,** причём число 1 – первый цветок, 2 – второй и т.д.. Введём функцию $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, перемещающую пчелу с некоторого цветка на случайный цветок, находящийся на расстоянии от предыдущего не более чем в 5 цветков, причём все места для перемещения равновероятны и после каждого перемещения расстояние между пчелой и первым цветком не уменьшается. В начальный момент пчела сидит на первом цветке. С какой вероятностью после трёх выполнений функции пчела не долетит до тринадцатого цветка?

80) На координатной плоскости случайным образом выбирают точку с целыми неотрицательными координатами, не превышающими по модулю 9. С какой вероятностью сумма координат точки не будет превышать 7?

81) Генератор случайных натуральных чисел сломался и в среднем стал выдавать в 3 раза больше чётных чисел, чем нечетных. С помощью генератора получили список из 2^{2025} чисел. С какой вероятностью сгенерированное число будет нечётным?

82) Найдите вероятность того, что при выборе случайного десятизначного двоичного кодового замка будет выбран замок, в котором нет двух единиц подряд.

83) Никита выписал на доску факториалы натуральных чисел, меньших 11. С какой вероятностью случайно выбранное число из написанных на доске является полным квадратом?

84)

Комбинаторика

1) Валера составляет строку из 5 символов, являющуюся корректным арифметическим выражением, в начале и конце которого не могут стоять знаки арифметических операций и в которой не должно быть незначащих нулей. При составлении строки он использует только цифры от 1 до 5 и знаки сложения и вычитания. Сколько строк может составить Валера?

2)

Пределы

1) Вычислите

$$\text{а)}\ \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x\to 0} \frac{x}{2^k \sin x} \quad \text{б)}\ \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 2x}{2^{k+1} \cos x}$$

2) Вычислите

$$\text{а)}\ \lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} \lim_{z\to 0} \frac{-\sin x \sin y \sin z}{xyz} \quad \text{б)}\ \lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} \lim_{z\to 0} \frac{-xyz}{\sin x \sin y \sin z}$$

3) Вычислите

$$\text{а)}\ \lim_{x\to \infty} \frac{3x^2 + 7x + 10}{x^2 + 6x + 5} \quad \text{б)}\ \lim_{x\to \infty} \frac{6x^2 + 7x + 10}{6x^2 + 6x + 5} \quad \text{в)}\ \lim_{x\to \infty} \frac{77x^2 - 10x + 101}{78x^2 + 6x + 1}$$

4) Вычислите

$$\text{а)}\ \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 + 7x + 1}{x^2 + 8x + 2} \quad \text{б)}\ \lim_{x\to 1} \frac{e^{\sin \pi x}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4}\right)}$$

5) Вычислите

$$\lim_{x\to \infty} \left(\frac{7t^5 - 2t^3 + e^{-t}}{t^5 + \sqrt{t^{10} + 5t^4}}\right)$$

Векторы

1) В пространстве заданы вектора $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ такие, что

$$|\vec{a}| = |\vec{c}| = 9, \qquad |\vec{b}| = 3, \qquad \vec{c} \perp \vec{a}, \qquad \vec{c} \perp \vec{b}, \qquad \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$$

Найдите длину вектора $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

2) Из одной точки исходят три попарно перпендикулярных вектора a, b, c длины 1. Найдите квадрат длины вектора a + b + c.

3.1) Пусть a_k - вектор длины k. В некотором n-мерном пространстве задано множество векторов P = $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Известно, что скалярное произведение любых двух различных векторов множества P равно нулю. Найдите наибольшее возможное количество векторов в множестве P, если длина вектора $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \leq 11$.

3.2) Пусть a_k - вектор длины k. В некотором n-мерном пространстве задано множество векторов P = $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Известно, что скалярное произведение любых двух различных векторов множества P равно нулю. Найдите такое наименьшее n, что длина вектора $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ не больше количества всевозможных пар векторов множества P.

4)

Уравнения (ЕГЭ)

1) а) Решите уравнение:

$$\frac{2025\cos(\arcsin x)}{2024} - \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{2024\cdot 2025}\right)\sin(\arccos x) = 0$$

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[\frac{\pi^e}{e^\pi}; \frac{e^\pi}{\pi^e}]$

2) а) Решите уравнение:

$$e^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{16}\right)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{16}\right) + 1$$

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-\ln e^{\sqrt{1337}}; \sqrt[4]{1234567}]$

3) а) Решите уравнение:

$$\sin^4\left(\frac{x}{4}\right) + 4\sin^3\left(\frac{x}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{4}\right) = 5\sin^2\left(\frac{x}{4}\right) + 4\sin\left(\frac{x}{4}\right)$$

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[42; 52]$

4) а) Решите уравнение:

$$26\sin^3 x + 169\cos^2 x = 234 - 208\sin x$$

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[\frac{\pi}{2}; 2\pi]$

5) а) Решите уравнение:

$$\log_2 16 \cdot \sin^2 x - \log_\pi \pi^{\sqrt{12}} \sin x = 2^{1.5}\sin x - \frac{26\sqrt{6}\cos^2 x - 13\sqrt{6}}{13 - 26\sin^2 x}$$

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[\frac{\pi}{2}; 2\pi]$

6) а) Решите уравнение:

$$20\sin x\cos x - \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 2\sin 2x\operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg} x\sin x\cos x - 5 = 0$$

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

Неравенства

1) Решите неравенство

$$\frac{\left(\log_{(x-1)} x^4 - \log_{(x-1)} x^7\right)(\arcsin(x^7) - \arcsin(x^6))}{(\arccos(x+1) - \arccos(x^2))\left(\operatorname{tg}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{1}{1+x^4}\right)\right)\left(\sqrt{x} - \sqrt{x^3}\right)} \leq 0$$

2) Решите неравенство

$$\frac{(x-1)(x^3-1)(x^5-1)\dots(x^{99}-1)}{(x^2-1)(x^4-1)(x^6-1)\dots(x^{98}-1)} \geq 0$$

3) Решите неравенство $\cos(\cos x) > \frac{1}{2}$

4) Решите неравенство $\sqrt{\cos x} \geq 2 - \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$

Экстремальные задачи из ЕГЭ

1) Найдите точку максимума $f(x) = e^{-0.5x^2}$

2) Найдите точку минимума $f(x) = e^{0.2x^2}$

3) Найдите наименьшее значение $f(x) = \sin x + 2x - \pi$ на $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$

4) Найдите наименьшее значение $f(x) = x^2 - 4|x| + 4$

5) Найдите наименьшее / наибольшее значение $f(x) = e^{7x^3}$ на $\left[\sqrt[3]{\frac{\ln 2}{7}}; \sqrt[3]{\frac{\ln 7}{7}}\right]$

6) Найдите наименьшее / наибольшее значение

$$f(x) = x^{2025} + x^{2023} + \cdots + x^3 + x$$

на [-1; 1] / [0;1] / [1;2]

7) Найдите наименьшее / наибольшее значение

$$f(x) = \log_\pi^{2025} x + \log_\pi^{2023} x + \cdots + \log_\pi^3 x + \log_\pi x$$

на $[\pi; 2\pi]$ / $[1; \pi]$

8) Найдите наименьшее / наибольшее значение $f(x) = 100x + 9|x - 1| + |x + 1|$ на [2;5] (или на [0;10])

9) Найдите наименьшее значение $f(x) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5$

10) Найдите наибольшее значение $f(x) = \frac{ab+bc+ac}{abc}$ при a, b, c >= 5.

11) Найдите наименьшее значение $f(x) = \frac{abc}{ab+bc+ac}$ при a, b, c >= 3.

12) Найдите наибольшее значение $f(x) = abc$ при $a + b + c = 9$, где a, b и c - положительные числа.

13) Найдите наименьшее значение $f(x) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ если $abc = 3$, где a, b и c - положительные числа

14) Найдите наибольшее значение $f(x) = \text{НОД}(x; 7!)$ при натуральных $x <= 10$.

15) Найдите наименьшее значение $f(x) = \text{НОК}(x; 5!)$ при натуральных $x <= 5$.

16) Найдите наибольшее значение $f(x) = \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{e}$ на отрезке $[\frac{1}{e}; e^2]$

Экономика (ЕГЭ)

1) Артём планирует в июле взять в кредит в банке S млн рублей на **десять тысяч** лет. Условия возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему равно S, если общая сумма выплат составит 510050 тысяч рублей?

Планиметрия (ЕГЭ)

1) В остроугольном треугольнике ABC опустили высоты BH и CM. Оказалось, что площади треугольника AMH и четырёхугольника MHCB равны.

А) Докажите, что угол BAC = 45°.

Б) Пусть высоты пересекаются в точке O. Найдите площадь невыпуклого многоугольника BMHCO, если BH = 5, CM = 6.

2*) В единичном правильном 192-тиугольнике провели отрезки, соединяющие чётные вершины. Эту же операцию повторяли до тех пор, пока на картинке не получился правильный треугольник.

А) Докажите, что центры симметрии искомого треугольника и 192-тиугольника совпадают.

Б) Найдите площадь внутренней части 192-тиугольника с исключением внутренней части искомого треугольника.

ТЕСТОВАЯ ЧАСТЬ

1) В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C AC = кор3, AB = 2кор3. Найдите в градусах угол BAC.

2) Из точки O вне окружности проведена касательная OB и секущая, пересекающая окружность в A и C, причем A принадлежит OC. Найдите OA, если OB = 2 и AC = 3.

3) В прямоугольном треугольнике один катет на 10 больше другого, а гипотенуза равна 5кор10. Найдите длину наибольшего/наименьшего катета.

4) На продолжении стороны AC остроугольного треугольника ABC за точку C отметили точку D и провели через D прямую, пересекающую BC в E, а AB в F, причем BF = FA = AC = CD. Найдите BE : EC.

5) Во вписанном четырёхугольнике стороны равны, 1, 3, 2 и 1, а одна из диагоналей 1. Найдите вторую диагональ.

6) На сторонах AB и AC треугольника ABC отметили соответственно точки E и D так, что BE = AE = 3, AD = 6, DC = 1, площадь ABC = 70. Найдите площадь AED.

7) В треугольнике ABC AB = 1, BC = 2, AC = кор3. Найдите угол ABC.

8) Найдите косинус угла правильного шестиугольника.

Математический анализ

1) Найдите значение производной 2024-ого порядка функции $f(x) = \cos x + 2^{100}$ в точке 0. *[Ответ: 1]*

2) Приведите пример хотя бы одной функции $f(x)$, для которой верно равенство $f\big(x + 2025f(x)\big) = f(x + 1945)$. *[Ответ: любая константа]*

3) Исследуйте на чётность функцию $f(x) = g\big(h(x)\big) \cdot h\big(g(x)\big)$, если $g(x)$ и $h(x)$ – чётная и нечётная функции соответственно. [Чётная]

4) Приведите пример любой непостоянной функции $f(x)$, для которой при любом наборе из k действительных чисел $x_1, x_2, \dots, x_k$ верно тождество

$$f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \dots \cdot f(x_k) = f(x_1 + x_2 + \dots + x_k)$$

5) Найдите среднее арифметическое координат точки, в которой функция $f(x, y, z) = |2x - y + 4z - 6| + |8x + 2y - 48 + z| + |x - y - 1 + 2z|$ достигает своего минимума. Гарантируется, что функция принимает свой минимум только в одной точке.

6) Никита для произвольной функции $f(x)$ строит обратную, меняя $f(x)$ и x местами, после чего выражает x через $f(x)$, как бы получая функцию $x(f)$. Обозначим обратную функцию для $f(x)$ как $f^{-1}(x)$. Приведите пример нетривиальной (не константа и не линейная) функции $f(x)$, для которой $f(x) = f^{-1}(x)$

7) Приведите пример функции $f(x)$, для которой при любых функциях $g(x)$ $f\big(g(x)\big) = g\big(f(x)\big)$

8) Приведите пример функции $f(x)$, для которой $f(x) \cdot f(-x) = 1$

Теория чисел (ЕГЭ)

1) Функция $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ соотносит натуральное число с произведением всех его делителей, за исключением единицы и самого числа.

а) Существуют ли такие натуральные n, для которых $f(n)$ неопределено?

б) Разрешимо ли уравнение $f(n) = n^2$ для двухзначных n?

в) Найдите минимальное натуральное n, являющееся корнем уравнения $f(n) = n^4$.

2) Назовём “хорошим” множество различных целых чисел, любые три элемента которого могут быть коэффициентами квадратного трёхчлена с двумя корнями (с учётом перестановок).

А1) Является ли множество $\{18;\ -1; 0\}$ “хорошим”?

А2) Может ли множество, состоящее из трёх целых чисел, быть “хорошим”?

Б1) Является ли множество $\{17;\ 1; 0\}$ “хорошим”?

Б2) Может ли множество, состоящее из трёх натуральных чисел, быть “хорошим”?

В1) Сколько трёхэлементных “хороших” множеств можно составить из элементов множества $\{-1;\ 0;\ 23; 77; 100\}$

В2) При каком наибольшем целом неположительном k из множества $\{k; -1;\ 0;\ 1; 10\}$ можно будет составить ровно 6 “хороших” множеств?

3) На доске написаны цифры 0, 2, 4, 6 и 8 в некотором порядке, причём каждая цифра записана дважды.

а) Можно ли составить из этих цифр пятизначное число, делящее на 7 и на 191 одновременно?

б) Можно ли составить из этих цифр такое натуральное число, большее 9, произведение цифр которого будет не меньше самого числа?

в) Найдите наибольшее четырёхзначное число, произведение цифр которого равно 1536 и его можно составить из цифр на доске.

4) В 11А классе k учеников. Пусть m – общее количество дружеских отношений между учениками в классе.

А) Существует ли такое k, при котором $m = 6$, если также известно, что каждый дружит с каждым?

Б) Существует ли такое k, при котором $m = 30$, если также известно, что каждый дружит с каждым?

В.1) Пусть у каждого ученика есть ровно l друзей. Найдите наибольшее l, при котором это возможно, если $1 \leq m \leq 5$.

В.2*) Пусть у каждого ученика есть ровно $(k - l)$ друзей. Найдите наибольшее l, при котором это возможно, если $1 \leq m \leq 5$.

5) Известно, что из пар натуральных взаимно простых чисел m и n разной чётности таких, что $m > n$, можно получить всевозможные тройки взаимно простых натуральных чисел $(x; y; z)$, удовлетворяющие равенству $x^2 + y^2 = z^2$, причём

$$x = 2mn, y = m^2 - n^2, z = m^2 + n^2$$

А) Можно ли из какой-нибудь пары $(m; n)$ получить тройку $(10388; 6795; 12413)$?

Б) Можно ли из какой-нибудь пары $(m; n)$ получить тройку $(981; 9579; 9629)$?

В1) Сколько различных троек $(x; y; z)$ можно получить из пары $(m; n)$, если $m \leq 10$ и $n \leq 10$.

В2) При каком наибольшем l можно получить не более 3 троек $(x; y; z)$ из пары $(m; n)$, если $m = 10$ и $n \leq l$.

6) Будем называть многочлен $P(x)$ степени $n \geq 2$ **полным**, если он имеет n необязательно различных действительных корней и его можно представить в следующем виде:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

Определим на множестве **полных** многочленов функцию **дискриминанта**:

$$D\big(P(x)\big) = a_n^{2n-2} \prod_{i \neq j} |x_i - x_j|,$$

где $\prod_{i \neq j} |x_i - x_j|$ – произведение всевозможных разниц корней многочлена $P(x)$, за исключением разниц корней самих с собой.

А1) Существует ли полный многочлен третьей степени с нулевым дискриминантом?

А2) Существует ли полный многочлен с дискриминантом равным 4?

А3) Существует ли приведенный полный многочлен с дискриминантом 5, у которого все корни и коэффициенты являются натуральными числами?

А4) Существует ли полный многочлен десятой степени с нулевым дискриминантом, если все его корни различны?

А5) Существует ли полный многочлен с рациональным дискриминантом и различными иррациональными корнями?

А6) Введём полный многочлен $P(x) = (x - 2)(x - 3)(x - 4)$. Найдите значение выражения $D\big(P(x)\big)$

Б1) Сколько существует пар натуральных чисел $a, b \leq 10$, при которых для полного многочлена $P(x) = (x^2 - 10x - ax + 10a)(x^2 - bx - 7x + 7b)$ $D\big(P(x)\big) = 0$?

Б2) Введём некоторый полный многочлен $P(x)$ степени m. Пусть $D\big(P(x)\big) = 1$. Найдите значение выражения $D\big(2P(x)\big) + D\big(P(x+1)\big)$

Б3) Введём некоторый полный многочлен $P(x)$ степени m и рассмотрим многочлен $S(x) = P(x + \varphi) + \varphi P(x)$, где φ – некоторая константа. Оказалось, что выполняется равенство

$$\varphi^2 D^2\big(S(x)\big) + 2\varphi^{2m} = \varphi^6 + (\varphi^{2m+1})^2$$

Чему равно $D\big(P(x)\big)$?

B1) Введём полный многочлен $P(x) = 5(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$. Найдите значение выражения $D\big(2P(2x+1)\big)$

B2) Пусть m – натуральное число, не меньшее 3. Рассмотрим $(m-1)^2$ различных полных приведенных многочленов $P_i(x)$ степени m, множеством корней каждого из которых являются последовательные натуральные числа. Обозначим за S сумму дискриминантов всех многочленов $P_i(x)$. При каком наименьшем m $S > 2^{32}$?

7) Саша написал на доске всевозможные многочлены сотой степени с различными действительными коэффициентами, причём значения коэффициентов берутся из отрезка [-52; 49].

А) Правда ли, что на доске есть многочлен, имеющий хотя бы один корень?

Б) Правда ли, что на доске существует хотя бы 100! многочленов, для которых существует точка, в которой значения многочленов равны?

В) Саша на отдельной доске написал такие 999 многочленов, что сумма любых 500 многочленов имеет действительный корень. Правда ли, что сумма каких-то семнадцати из них имеет действительный корень?

8) Назовём **многополярной** систему координат, в которой любая точка задаётся двумя способами: прямоугольными координатами $(x; y)$ и полярными координатами $(\varphi; r)$, где r - расстояние от начала координат до точки, а φ – угол между осью X и радиус-вектором, проведённым до искомой точки.

А) Какие полярные координаты будет иметь точка, заданная как $\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}; \frac{5}{2}\right)$ в прямоугольных координатах.

Б) В многополярной системе координат построили график функции $r(\varphi) = \varphi$. Найдите сумму целочисленных значений функции при $\varphi \in (0; 10\pi)$

В) График функции $r(\varphi) = |\,n\cos\varphi\,|$ в многополярной системе координат при некотором фиксированном натуральном n образует фигуру, состоящую из двух замкнутых областей. Назовём всю фигуру **тучей**, а замкнутые области – **облаками**. Площадь тучи определим как суммарную площадь всех облаков. Пусть S_n – площадь тучи при фиксированном n. Выразите явно значение выражения

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{(-1)^{k+1}} = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + S_5 - \cdots$$

при $n \geq 2^{32}$?

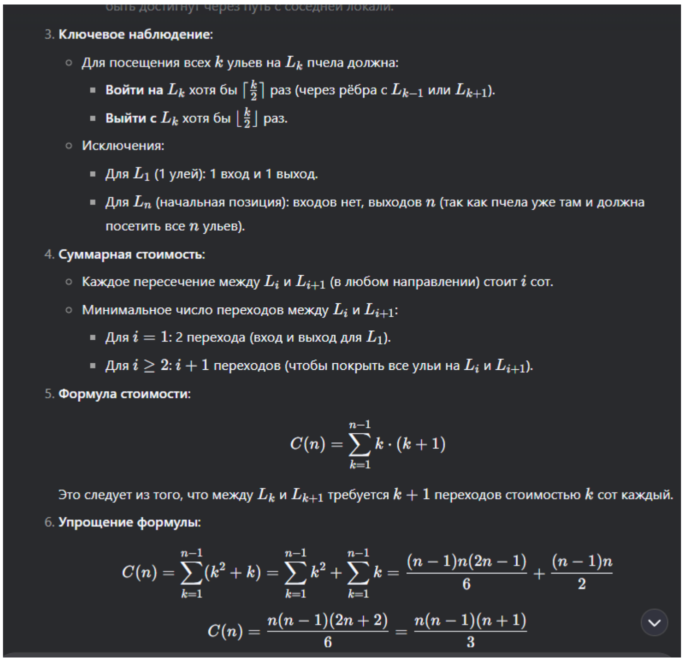
9) Назовём координатную плоскость **лугом**. Для каждого числа k из некоторого набора первых n натуральных чисел произвольно выбирается k точек, лежащих на прямой $x = k$, принадлежащей лугу. Назовём каждую точку **ульем**, прямую $x = k$ k-ой локалью, улей, расположенный на первой локали, **главным**, а n-ую локаль **последней**. Затем из всех ульев, расположенных на i-той локали, проводятся отрезки ко всем ульям, расположенным на $(i + 1)$-ой локали. Назовём каждый отрезок – **путем**, а всю совокупность ульев, локалей и путей – **пасекой**. Пчела живёт на пасеке, она может перелетать между ульями только, если между ними есть путь. Путей внутри одной локали не существует.

А) Какое минимальное количество межлокальных перелётов нужно совершить пчеле, чтобы добраться из пятой локали в седьмую, если всего локалей 15 и пчеле по пути нужно прилететь к королеве, расположенной в главном улье?

Б1) Сколько всего путей в пасеке при произвольном n? (Выразите явную формулу)

Б2) Сколько всего существует траекторий у пчелы для перелёта из главного улья до самой последней локали при произвольном n? (Выразите явную формулу)

В) Пусть у пчелы есть ровно 100 сот, а каждый путь из k-ой локали в следующую стоит ровно k сот. Какое максимальное количество локалей в пасеке может быть, если пчела хочет посетить все ульи, и она изначально находится в последней локали?



быть достигнут через путь с соседней локали.

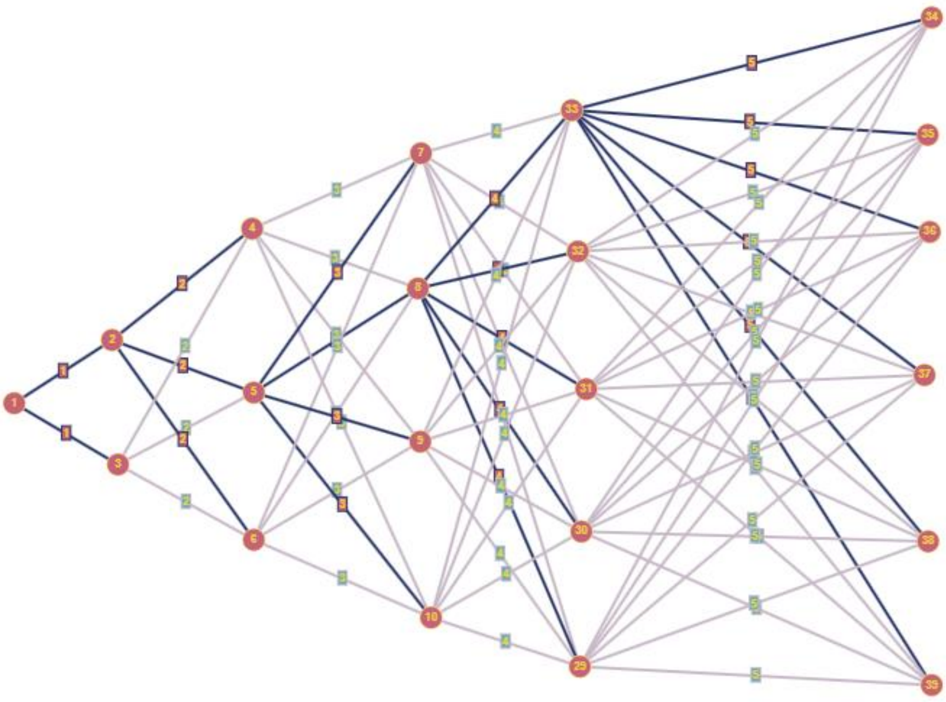
3. **Ключевое наблюдение:**
   - Для посещения всех k ульев на L_k пчела должна:
     - **Войти на** L_k хотя бы $\lceil \frac{k}{2} \rceil$ раз (через рёбра с L_{k-1} или L_{k+1}).
     - **Выйти с** L_k хотя бы $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ раз.
   - Исключения:
     - Для L_1 (1 улей): 1 вход и 1 выход.
     - Для L_n (начальная позиция): входов нет, выходов n (так как пчела уже там и должна посетить все n ульев).
4. **Суммарная стоимость:**
   - Каждое пересечение между L_i и L_{i+1} (в любом направлении) стоит i сот.
   - Минимальное число переходов между L_i и L_{i+1}:
     - Для $i = 1$: 2 перехода (вход и выход для L_1).
     - Для $i \geq 2$: $i + 1$ переходов (чтобы покрыть все ульи на L_i и L_{i+1}).
5. **Формула стоимости:**

$$C(n) = \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot (k+1)$$

   Это следует из того, что между L_k и L_{k+1} требуется $k + 1$ переходов стоимостью k сот каждый.
6. **Упрощение формулы:**

$$C(n) = \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 + k) = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2}$$

$$C(n) = \frac{n(n-1)(2n+2)}{6} = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}$$



Пример для шести локалей (мин 70 сот)

Планиметрия

1) На плоскости зафиксированы точки A и B, находящиеся по одну сторону от прямой ε. Каким должно быть местоположение некоторой точки C на прямой ε, чтобы сумма отрезков AC и BC была минимальной?

2) Докажите, что сумма длин звеньев незамкнутой ломаной, у которой любые три вершины не лежат на одной прямой, больше длины отрезка, соединяющего концы ломаной.

3) На гипотенузе AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC отметили точки M и N, причём M лежит на AN, а $AM = 1$, $MN = 2$ и $NB = 3$. Найдите угол MCN.

4) В параллелепипеде ABCD на сторонах AB и CD отметили точки M и N соответственно, а затем провели отрезки AN, NB, DM, CM. AN пересекает MD в точке P, а MC пересекает NB в точке Q. Известно, что площади треугольников ADP и BQC соответственно равны 13 и 17. Найдите площадь четырёхугольника MPNQ.

5) Саша захотел построить на плоскости равнобедренный прямоугольный треугольник со стороной, меньшей единицы и радиусом вписанной окружности, большим чем 1/3. Сможет ли он это сделать?

6) В прямоугольном треугольнике вписанная окружность разбивает гипотенузу на отрезки с длинами 1 и 2 соответственно. Найдите площадь треугольника.

7) На плоскости проведена прямая. Разрешается ставить произвольное количество точек и чертить окружности с центрами в отмеченных точках и произвольным радиусом. Также можно провести один дополнительный отрезок между двумя отмеченными точками. Как можно получить на картинке угол в 30°, использовав как можно меньше дополнительных построений?

Стереометрия

1) В пространстве рассматривается конечное множество непараллельных плоскостей. Могут ли все плоскости множества пересекаться только в одной точке?

2) На плоскости γ расположена окружность с расположенными на ней 2025 точками так, что расстояние между соседними точками постоянно и равно единице. Вне плоскости γ отметили точку A на расстоянии 1 от плоскости γ и соединили её со всеми точками на окружности отрезками, а также отрезками соединили каждую пару соседних точек на окружности. Найдите объём фигуры, образованной проведенными отрезками.

3) На плоскости γ расположен круг единичного радиуса. Где-то на круге (или на его границе) случайным образом отметили 2^{100} точек в разных местах. Вне плоскости γ отметили точку A на расстоянии 1 от плоскости γ так, что её проекция на плоскость γ совпадает с центром круга, и провели отрезки из неё во все точки на круге. Какой может быть наибольшая сумма длин проведённых отрезков?

4) Пусть задано $2n$ векторов, любые два из которых перпендикулярны. Могут ли они все лежать в одной плоскости?

5) В мешке лежит 31 кубик с единичными измерениями. Какой наибольший объем может иметь прямой параллелепипед с длинами сторон хотя бы по 2?

6) Сферу радиуса R пересекает прямая в точках A $(-1; \sqrt{7} - \sqrt{3}; 7)$ и B $(0; \sqrt{7}; 9)$ и образует острый угол 45° с диаметром, проходящим через точку A. Найдите R.

7) Найдите объём фигуры, расположенной в трёхмерной декартовой системе координат, ограниченной снизу плоскостью $z = 0$ и ограниченной сверху поверхностью $z = 1 - (|x| + |y|)$. В ответе укажите утроенное значение объёма.

8) В трёхмерной системе координат расположена тонкая прямоугольная труба длиной a и шириной и высотой b, причём середина одного из концов трубы является центром координат. В начальный момент времени в центре системы координат расположен абсолютно упругий попрыгунчик без массы, который начинает прямолинейное равномерное

движение под углом в $\varphi°$ от оси симметрии цилиндра внутрь цилиндра. Затем он при каждом ударе об внутреннюю стенку цилиндра отскакивает под тем же углом, под которым падал, пока не вылетает из трубы. Обозначим точки ударов A_i, т.е. A_1 – первый удар, A_2 – второй удар и так далее.

а) Докажите, что любые четыре точки вида $A_t, A_{t+2}, A_{t+3}, A_{t+1}$ образовывают параллелограмм.

б) Какой путь преодолеет попрыгунчик от начального момента до последнего удара, если $a = 10, b = 2, \varphi = 30°$?

Вычисления и преобразования

1) Найдите значение выражения $\log_\pi \pi + \log_\pi \pi^2 + \log_\pi \pi^3 + \cdots + \log_\pi \pi^{100}$

2) Найдите значение выражения $\ln(e \cdot e^2 \cdot e^3 \cdot \ldots \cdot e^{1000})$

3) Найдите значение выражения $\frac{\log_\pi 3}{\log_\pi 3} + \frac{\log_\pi 9}{\log_\pi 3} + \frac{\log_\pi 27}{\log_\pi 3} + \cdots + \frac{\log_\pi 3^{1000}}{\log_\pi 3}$

4) Найдите значение выражения $\log_3(\log_2(\log_2 64))$

5) Пусть $f(x) = 2x - 3$. Найдите значение выражения $f\left(\frac{x-3}{2}\right) + f\left(\frac{3-x}{2}\right)$

6) Найдите значение выражения $\frac{\log_\pi(\pi^3-3\pi^2+3\pi-1)}{\log_{\sqrt{\pi}}(\pi-1)}$

7) Найдите значение выражения $C_{3n}^{38-n} + C_{21+n}^{3n}$

8) Найдите значение выражения $tg\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$

9) Найдите значение выражения $(2\% \ \cdot 5\%)$. Ответ выразите в процентах.

10) Найдите значение выражения $|-|-|-|-|-|-|-|-2||||||||$

Простейшие уравнения и неравенства

1) [Произволов В.В.] Найдите любое решение уравнения $28x + 30y + 31z = 365$ в натуральных числах. В ответ запишите $x + y + z$.

2) Найдите корень уравнения $e^{x^2+8x-20} = \pi^{x^2-9x+14}$

3) Найдите наибольший корень уравнения $\log_{2^x}^2 \ -2\log_2 x - 8 = 0$

4) Найдите корень уравнения $1 + 2 + 3 + \cdots + x = 78$

5) Найдите корень уравнения $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + x = 2047$

6) Найдите наименьшее натуральное $n \geq 2$ такое, что НОД$(n; 7!) = 1$.

7) Найдите корень уравнения $42^{10^x} = 42^{1000}$

8) Найдите наибольший корень уравнения $x^2 - x\sqrt{2} = x\sqrt{3} - \sqrt{6}$ и запишите в ответ его квадрат.

9) Найдите корень уравнения $2x\sqrt{7} - x\sqrt{14} - 2\sqrt{7} + \sqrt{14} = 0$

10) Найдите корень уравнения $x^7 - 7x^3 + x - 1 = x^7 - 7x^3 + 2x - 6$

11) Найдите корень уравнения $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 8 - 12x + 6x^2 - x^3$

12) Найдите такое натуральное k, что $C_k^5 \cdot C_5^k = 1$.

13) Найдите корень уравнения $8^x = \frac{2^{56} - 4^{26}}{30}$

14) Найдите корень уравнения $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n = 65536$

15) Найдите корень уравнения $6! \cdot 7! = n!$

Отдельные задачи

1) Функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задана рекурсивно следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ f(x-1) + 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

Назовём рекурсивным переходом вызов функции самой себя от некоторого аргумента. Сколько рекурсивных переходов будет выполнено при вычислении $f(2025^{2025})$?

2*) Про квадратное уравнение $ax^2 + x + c = 0$ с целыми коэффициентами известно, что произведение всех коэффициентов и корней уравнения неположительно. Найдите всевозможные целые корни этого уравнения.

3) На оси абсцисс отметили 10 точек, которые образуют арифметическую прогрессию с единичной разностью. Из них Артём выбирает две случайные и строит параболу со старшим коэффициентом $a = 1$, проходящую через них. С какой вероятностью дискриминант искомой параболы будет не больше 16?

4*) Про квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ с целыми коэффициентами и двумя целыми корнями известно, что $|c - b| = 1$ и $a < 0$. Решите уравнение в целых числах.

5) Денис написал на доске десять последовательных натуральных чисел. Какое наибольшее количество простых чисел может быть среди них?

6) В Королевстве Псов каждый уважающий себя пёс должен жить в своём удобном частном доме со своей семьёй. Пёс Геннадий собирается в будущем переехать со своей семьей из малосемейки, расположенной на улице Псин, в новомодный район, находящийся в стадии разработки, и купить там себе дом. Он звонит в компанию, ответственную за обустраивание района, и узнает дополнительную информацию о нём. В районе планируется параллельное размещение 10 улиц, соединённых одним нежилым проспектом, перпендикулярным этим улицам. На каждой улице с каждой стороны имеется по 10 мест для частных домов, однако не все они могут быть заняты домами. На каждой улице обязательно должен быть продуктовый магазин, аптека, просторная площадь и детская площадка. Также пёс Геннадий вредный – он не хочет жить прямо рядом с детской площадкой и площадью, чтобы не слышать шум чужих детей. Также известно, что с каждой стороны улицы должен

быть хотя бы 1 дом и 1 общественное место, будь то аптека или площадь. Какое оптимальное местоположение для своего дома может выбрать Геннадий на первой улице, чтобы его всё удовлетворяло и всё соответствовало планам компании?

7) Возле собачьей будки с вечно голодным неуязвимым псом стоит миска для корма. Каждый день, утром и вечером, в миску насыпают некоторое количество корма, причём каждый следующий день это количество растёт в 2 раза. Если количество корма не превышает половины миски, то пёс съест половину от имеющегося в миске корма, иначе пёс съест 80% корма в миске. Сколько корма положили утром первого дня, если к вечеру 3 дня при вместительности миски в 18 килограммов осталось 4 кг 5 грамм корма?

8) Существует ли квадратичная функция с целыми коэффициентами, график которой проходит через точки $(1; 1)$ и $(7; 3)$?

9) Артём подбирает целые коэффициенты $a, b \in [-30; 30]$ для многочлена $P(x) = ax^3 + bx^2 + bx + a$. Сколько существует пар $(a; b)$, при которых многочлен имеет хотя бы одну точку экстремума?

10) 2024 девочки выстроились в круг и взялись за руки. Известно, что у любых двух девочек, взявшихся за руки, от одной до четырёх монет, причём количество всех сумм монет в парах одинаково. Сколько всего монет у девочек в сумме?

11) [Росатом, 2020] $P(x)$ - многочлен с целыми коэффициентами. Известно, что уравнение $P(x) = 8$ имеет целый корень на полуоси $x \geq 8$ и $P(4) = 17$. Найдите этот корень.

12) Назовите наименьший факториал натурального числа, оканчивающегося сотней нулей.

13) [Гробовой вариант ЕГЭ от Школково] На плоскости зафиксирована декартова прямоугольная система координат. На осях Ox и Oy живут одномерные наблюдатели: они видят не сами точки плоскости, а только проекции точек на оси Ox и Oy соответственно (но они-то думают, что видят сами точки). Известно, что точка P движется по графику функции $f(x) = x^3 + x^2$ так, что наблюдатель на оси Ox уверен, что она движется в направлении Oy с постоянной скоростью, равной 2. С какой скоростью по мнению наблюдателя, живущего на оси Oy, движется точка P в

направлении оси Oy в тот момент, когда она проходит положение $(1; f(1))$?

14) Заданы положительные вещественные коэффициенты k и b. На координатной плоскости изобразили 4 прямые: $y = kx + b, y = b - kx, y = -kx - b$ и $y = kx - b$, которые попарно пересекаются в точках A, B, C и D. Найдите площадь четырёхугольника ABCD.

15) Мнимая муха летает над комплексной плоскостью. Изначально муха находится в центре плоскости, а хочет долететь до комплексного числа $(a + ia)$, где a – некоторая константа. За 1 шаг из точки $(x + iy)$ муха может перелететь в одну из точек $(x + 1 + iy)$, $(x + i(y + 1))$, $(x - 1 + iy)$, $(x + i(y - 1))$. Какое минимальное количество ходов потребуется мухе, чтобы долететь до своей цели?

16.1) Про некоторый приведенный кубический многочлен с тремя корнями x_1, x_2 и x_3 известно, что

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11, \qquad x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 31, \qquad x_1x_2x_3 = 21$$

Найдите разницу между наибольшим и наименьшим корнями многочлена.

16.2) Про некоторый приведенный кубический многочлен с тремя корнями x_1, x_2 и x_3 известно, что

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11, \qquad x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 31, \qquad x_1x_2x_3 = 21$$

Найдите значение выражения $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

17) Найдите все возможные дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ (a и $c \in \mathbb{Z}, b$ и $d \in \mathbb{N}$) такие, что $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$

18) В словаре Ожегова около 100 000 лексических единиц. Сколько существует способов составить из этих лексических единиц предложение из 50 000 слов? Порядок лексических единиц в предложении имеет смысл, а значения лексических единиц – нет.

19) На клеточном поле n x n по границам клеток чертят неубывающую “лестницу”, начинающуюся в левом нижнем углу и заканчивающуюся в правом верхнем. Сколько таких “лестниц” можно начертить?

20) Найдите количество решений в натуральных числах уравнения $xyz = 10!$, где 10! обозначает произведение всех натуральных чисел от 1 до 10 включительно.

21) Назовём функцию f **пилой**, если она:

1) кусочно-линейная, определенная на отрезке $[0; 10]$, а вне отрезка не определена;

2) при целых значениях аргумента функция принимает неотрицательные целые значения;

3) $f(0) = 0, f(10) = 10, \max(f(x)) = 10$.

Сколько всего существует **пил**?

22) Назовём набор S из 100 действительных чисел замечательным, если

$$\max(S) < \frac{\pi}{2}, \min(S) > -\frac{\pi}{2}$$

и для любых $a, b \in S$ выполняется неравенство $e^{tga} \geq e^{tgb}$. Сколько существует замечательных наборов таких, что хотя бы одно число из набора является корнем уравнения

$$11\cos^2 x + 36\sin^4 x = 11 - \cos 2x$$

23) Найдите количество двухзначных чисел, взаимно простых с 10!

24.1) Для квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ с целыми коэффициентами известно, что

$$a + b + c = 0 \text{ и } c = pa, \text{где } p - \text{простое число, меньшее } 20.$$

Найдите все возможные целые корни уравнения.

24.2) Для квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ с целыми коэффициентами известно, что

$$a + b + c = 0 \text{ и } c \text{ не делится на } a.$$

Найдите все возможные целые корни уравнения.

25) Найдите максимальное значение выражения $(x + y)$, если выполняется равенство

$$x^2 + 3xy + 54 - 20x = 20y - 37 - y^2 + xy$$

26) Приведите пример многочлена 2024-ой степени с целыми ненулевыми коэффициентами, для которого число 1 является корнем.

27) Докажите, что $7^{(2024^{2023})} - 3^{(12^{13})}$ делится на 10.

28) Никита решил найти последнюю цифру числа A, если

$$A = 123456789 \cdot 234567891 \cdot 345678912 \cdot 456789123 \cdot 567891234$$

Помогите ему это сделать.

29) Приведите пример функции, для которой при любых действительных значениях x выполняется равенство:

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

30) [Гробовой вариант ЕГЭ от Школково] Найдите остаток от деления $(51 \cdot 51 \cdot \ldots \cdot 100)^2 - (1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 50)^2$ на 101.

31) Факториалу какого числа равняется значение выражения $\frac{(6!)!}{6!}$?

32**) Найдите последние две цифры числа 3^{431}.

33) Решите уравнение $x^y = xy$ в общем виде и приведите несколько частных решений.

34) Докажите, что уравнение вида $x^{11} + a^2x^7 + b = 0$ всегда имеет ровно 1 действительный корень и найдите его при условии, что система

$$\begin{cases} ax + y = a \\ -b = x + z \\ bz + z = ab + ay \end{cases}$$

не имеет, либо имеет бесконечное количество решений.

35) Докажите, что бесконечная периодическая дробь 0,12345678910111213141516…, в котором после запятой по порядку перечислены все натуральные числа, не является периодической.

36) [Известная задача] Дан вписанный в окружность ω прямоугольник со рациональными сторонами a и b. На его сторонах, как на диаметрах, построено 4 круга ω_1 , ω_2 , ω_3 и ω_4. Назовём "лепестками" множество точек, принадлежащих объединению фигур ω_1 , ω_2 , ω_3, ω_4 и ω, но не принадлежащих окружности ω. Может ли площадь "лепестков" быть иррациональной?

37) Каким количеством нулей оканчивается число 12345! ?

38) В параллелепипеде ABCD на сторонах AB и CD отметили точки M и N соответственно, а затем провели отрезки AN, NB, DM, CM. AN пересекает MD в точке P, а MC пересекает NB в точке Q. Известно, что площади треугольников ADP и BQC соответственно равны 8 и 10. Найдите площадь четырёхугольника MPNQ.

39) Решите уравнение $(x^4 + 1)(y^4 + 1) = 4x^2y^2$

40) Обозначим $S(n)$ сумму цифр числа n. Решите уравнение

$$1 + n + S(n) + S\big(S(n)\big) + \cdots + \underbrace{S\Big(S\Big(\ldots S\big(S(n)\big)\Big)\Big)}_{123456788 \text{ вложений}} = 9^{12}$$

41) Обозначим $S(n)$ сумму цифр числа n. Решите уравнение

$$\underbrace{S\Big(S\Big(\ldots S\big(S(n)\big)\Big)\Big)}_{123456789 \text{ вложений}} - \underbrace{S\Big(S\Big(\ldots S\big(S(n)\big)\Big)\Big)}_{123456788 \text{ вложений}} = 5$$

42) Артём поделил на 7 каждое число от 100 до 200 включительно в столбик и записал на доску полученный остаток от деления. Затем он сложил все полученные остатки. Какое число получилось у Артёма?

43) Никита написал на бесконечной доске многочлен степени 10^{100} с действительными различными ненулевыми коэффициентами. Затем на этой же доске он написал всевозможные многочлены той же степени, полученные из первого перестановкой коэффициентов. Существует ли такая точка c, в которой значения всех многочленов равны?

44) [ОММО 2020] Дан многочлен F(x) = 1 + 2x + 3x 2 + 4x 3 + . . . + 100x 99. Можно ли, переставив коэффициенты в нём, получить многочлен G(x) = g0 + g1x + g2x 2 + g3x 3 + . . . + g99x 99 такой, что для всех натуральных чисел k > 2 разность F(k) − G(k) не кратна 100?

45.1) По данным на 2024 год, в России насчитывается 1119 городов. Можно ли соединить города дорогами с двусторонним движением так, чтобы из каждого города шли ровно 3 дороги к ближайшим городам?

45.2) По данным на 2025 год, в Беларуси насчитывается 115 городов. Можно ли соединить города дорогами с двусторонним движением так, чтобы из каждого города шли ровно 5 дорог к ближайшим городам?

46) Никита хочет описать поведение некоторого физического процесса с помощью функции $f(x) = x^{4047} + a_1 x^{4045} + a_2 x^{4043} + \cdots + a_{2023} x + a_{2024}$ от некоторого состояния x, представленного в виде вещественного числа. Известно, что $f(0) = 1$. Найдите значение произведения всех комплексных корней функции.

47) Кандидат физико-математических наук решил полакомиться любимой пиццей. Он заказал пиццу “Маргарита” в ресторане и попросил разрезать её на максимально возможное количество кусков с помощью лишь 20 прямых разрезов, причём концы этих разрезов должны находиться на краях пиццы. При этом он указал, что количество кусков при n разрезах – сумма n и количества кусков при $(n-1)$ разрезе. Найдите количество кусков пиццы, которое придётся съесть кандидату физико-математических наук.

48) Сколько существует десятизначных двоичных кодовых замков, в которых нет двух единиц подряд?

49) Приведите пример функции, имеющей хотя бы 2^{2024} точек минимума.

50) Решите уравнение

$$\sqrt{2025-x} \cdot \sqrt{2024-x} \cdot \ldots \sqrt{1-x} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1} \cdot \ldots \cdot \sqrt{x-2024} \cdot \sqrt{x-2025} = 0$$

51) Анна нарисовала на большой доске прямую и отметила на ней 20 точек, каждую из которых назвала латинской буквой. Сколько всего лучей на доске может назвать Анна двумя буквами? Насколько это число отличается от количества отрезков на доске?

52) Денис провёл на плоскости 20 попарно различных прямых произвольным образом. На какое максимальное и на какое минимальное количество областей могла быть разделена плоскость этими прямыми?

53) У ребёнка было N маленьких кубиков, из которых он составил три куба со сторонами x, y и z соответственно. Назовём полученные кубики “большими”. Известно, что если он разберет их и уберет k кубиков, то сможет составить ровно из $(N-k)$ кубиков новый параллелепипед, у которого две стороны совпадают соответственно со сторонами каких-то двух “больших” кубиков, а третья сторона в три раза больше стороны оставшегося кубика. Докажите, что k делится на $x+y+z$.

54) Докажите, что в треугольнике с рациональными сторонами значения площади, периметра и отношения радиусов вписанной и описанной окружностей – рациональные числа.

55) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x_1^2 + x_1 + 2 = 0 \\ x_2^2 + 2x_2 + 3 = 0 \\ 2x_3^2 + 3x_3 + 5 = 0 \\ \dots \\ 55x_{10}^2 + 89x_{10} + 144 = 0 \end{cases}$$

56) Решите уравнение $2^{|x|} = \cos x$

57) [Гробовой вариант ЕГЭ от Школково] Пытаясь опровергнуть Великую теорему Ферма, Игорь заметил, что у уравнения $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$ есть решения

$$\begin{cases} a = 3x^2 + 5xy - 5y^2 \\ b = 5x^2 - 5xy - 3y^2 \\ c = 4x^2 - 4xy - 6y^2 \\ d = 6x^2 - 4xy - 4P(y) + 4 \end{cases}$$

где $P(y)$ – многочлен сотой степени. Найдите $P(1)$.

58) В 9-00 Женя на остановке “20-я линия” сел в троллейбус №16 и выехал на смену во “Вкусно и точка”, двигаясь с постоянной скоростью 20 км/ч и потратив на дорогу 30 минут. По счастливому обстоятельству, в 9-00 в заведении “Вкусно и точка”, в котором работает Женя, Кирилл доел бургер и решил пешком прогуляться до остановки “20-я линия”, двигаясь также с постоянной скоростью 5 км/ч и по тому же маршруту, что и троллейбус №16. Когда Женя приехал на точку, он понял, что ошибся днём и поехал обратно домой на таком же троллейбусе, но который, в этот раз, почему-то ехал со скоростью на 5 км/ч меньше. Известно, что Женя видел Кирилла в окне троллейбусе 2 раза: во время дороги туда и обратно. Сколько времени прошло между двумя этими событиями?

59) Никита нарисовал на доске окружность и расставил на ней некоторые три числа в некотором порядке. Затем он посчитал три числа: сумму чисел на окружности, произведение всех чисел на окружности и сумму произведений соседних чисел на окружности, причём полученные числа ровно в данном порядке образуют арифметическую прогрессию, разница

между максимальным и минимальным из них равна 20, а их сумма равна 63. Найдите сумму квадратов чисел, расположенных на окружности.

60) Кватерниональная стрекоза летает в четырёхмерном пространстве с заданной системой координат. За 1 шаг стрекоза изменяет своё положение в пространстве следующим образом: стрекоза сначала выбирает случайную ось и летит в обратную сторону от направления оси на расстояние в единицу, затем она выбирает вторую ось из оставшихся трёх и летит на 2 вдоль этой оси, затем она в третий раз выбирает ось из двух оставшихся и летит в обратную от направления оси сторону на 4, и, наконец, в последний раз стрекоза берет оставшуюся ось и летит по направлению оси на 3. Изначально стрекоза находится в точке $(137;\ -172; 228; 100)$. Могла ли стрекоза после некоторого количества таких шагов оказаться в точке (200; 136; 90; -132)?

61) [Для младшеклассников] Поросята Ниф-Ниф, Нуф-Нуф и Наф-Наф поделились со всеми, сколько им лет. Затем поросята встали в круг, взявшись за руки. Может ли быть так, что у любой пары поросят возраста разной четности?

62) Решите уравнение

$$\cos^2\left(\sqrt{1-x^2}\right)-1+2\cos 1=2\cos\left(\sqrt{1-x^2}\right)+x^2-\sin^2 1$$

63) Решите уравнение

$$\sin 100x\cdot\sin 99x\cdot\ldots\cdot\sin 2x\cdot\sin x\cdot\cos x\cdot\cos 2x\cdot\ldots\cdot\cos 99x\cdot\cos 100x=0$$

64) Никита произвольно разрезал квадрат со стороной k $(k>2^{1024})$ на k^2 треугольников. Правда ли, что площадь хотя бы одного треугольника не меньше 1?

65) Найдите все такие натуральные k, при которых выражение $\frac{k^3+k^2+k+1}{k^2+1}$ является целым числом.

66) Существует ли не более чем 11-значное число такое, что его сумма цифр не меньше 103 и является палиндромом?

67) [Известная задача] Арсений хочет разрезать доску 16×16 по границам клеток на части и сложить из этих частей клетчатый прямоугольник 43×6. Сможет ли он это сделать?

68) Артур рассматривает такую последовательность из девяти натуральных чисел, у каждых двух элементов которой различный остаток при делении на 9. Какой остаток при делении на 9 будет у суммы всех элементов последовательности?

69) Дисперсией ряда чисел называется среднее арифметическое квадратов отклонений чисел ряда от среднего арифметического ряда, где отклонением числа от среднего арифметического называется разница между числом и средним арифметическим. На доске записали 5 различных натуральных чисел. Может ли дисперсия быть меньше 1?

70) На доске написали 10 различных натуральных чисел, причём среднее арифметическое любых пяти из них – целое число. Найдите минимально возможную сумму чисел на доске.

71) [Омск, МЭ ВСОШ, 2025-2026] Докажите, что для любых положительных x, y верно равенство $\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{\pi}{2}$.

72) [Омск, МЭ ВСОШ, 2025-2026] Числа a, b, c, d, e образуют геометрическую прогрессию, причем среди них есть как рациональные числа, так и иррациональные. Может ли рациональных чисел быть четыре?

73) Докажите, что при всех натуральных n число $n^3 - n + 2$ не делится на 6.

74) [Гробовой вариант ЕГЭ от Школково] Определим операцию $*$ для положительных чисел x, y следующим образом:

$$x * y = \frac{x^2 e^y}{e^x y^2}$$

Решите уравнение

$$\frac{(x * x) * e^y}{(y * y) * e^x} = x * y$$

75) [Омск, МЭ ВСОШ, 2024-2025] Пусть $f(x) = x^2 - 2x$. Найдите все x, при которых верно неравенство $f\Big(f\big(f(x)\big)\Big) \leq 3$.

76) [Омск, МЭ ВСОШ, 2024-2025] Найдите какое-нибудь число А такое, что 2А является точным квадратом, а 3А – точным кубом натурального числа.

77) В ряд выписали 2^{2025} натуральных чисел, причём для всех натуральных $k \leq 2^{2025}$ известно, что сумма любых k подряд идущих чисел делится на k. Найдите наименьшую возможную сумму чисел в ряду.

78) (Всеросс, 1994, ОЭ, 10.6) Найдите свободный член многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, если известно, что он по модулю меньше тысячи, и $P(19) = P(94) = 1994$.

Параметры

1) Найдите такие значения параметра δ, при каждом из которых найдётся такой x из области определения функции, для которого $f(x) = \sqrt{x^{76}(2-x)^{11}(x+2)^{17}} + \sqrt{x^{132}(x-2)^{13}(x+2)^7} + \sqrt{8 - |x-\delta| - |x+\delta|}$ будет неотрицательна.

2) Найдите такие значения параметра δ, при которых для вычисления $f(\delta)$ нужно совершить от сотни до тысячи рекурсивных вызовов, если

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 10 \\ f(x-1)+1, & x \geq 10 \end{cases}$$

3) На плоскости из точки X провели m лучей в разные стороны, которые разделили плоскость на m **целых** углов. Известно, что для любых углов γ и δ выполняется неравенство $\gamma^{2048} - \delta^{2048} \geq \delta^{2048} - \gamma^{2048}$. Найдите всевозможные значения углов при всевозможных значениях m.

4) На координатной плоскости задан набор из n ($n > 2^{100}$) векторов:

$$\overrightarrow{k_1}\left(\frac{a^7 - 10a^6}{a+1}; \frac{35a^7 - 50a^6 + 24a^5}{a-1}\right), \overrightarrow{k_2}\left(\frac{a+1}{a+2}; \frac{a-1}{a-3}\right), \dots,$$

$$\overrightarrow{k_{n-1}}\left(\frac{a+n-2}{a+n-1}; \frac{a-2n+3}{a-2n+1}\right) \text{ и } \overrightarrow{k_n}\left(\frac{a+n-1}{a^3}; \frac{a-2n+1}{a^5}\right).$$

При каких значениях параметра a сумма произведений абсцисс и произведений ординат всех заданных векторов равна нулю?

5) При каких действительных значениях k на плоскости можно составить треугольник со длинами сторон 2^k, 2^{k+1} и 2^{k+2}?

6) При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} \sin(\pi x - \pi a) \cdot \sin(\pi y - \pi a) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет нечетное кол-во решений?

7) При каких натуральных значениях параметра a уравнение

$$\text{НОД}(2a^2 - 4a; a^2 - 2a) = ax - x^2$$

будет иметь 2 корня?

8) На координатной плоскости задано два круга неравенствами $(x-a)^2+(y-a)^2 \leq (2-a^2)$ и $(x-2a)^2+(y+5a)^2 \leq (2-a^2)$. При каких значениях параметра a объединение этих кругов будет иметь наибольшую площадь?

9) При каких значениях параметра a уравнение

$$\log_{\pi}^{999}(x^2-6x+13)-\log_{\pi}^{999}(-2x^2+4ax-2a^2+a+1)+$$
$$\log_{\pi}^{997}(x^2-6x+13)-\log_{\pi}^{997}(-2x^2+4ax-2a^2+a+1)+\dots+$$
$$\log_{\pi}^{3}(x^2-6x+13)-\log_{\pi}^{3}(-2x^2+4ax-2a^2+a+1)+$$
$$\log_{\pi}(x^2-6x+13)-\log_{\pi}(-2x^2+4ax-2a^2+a+1)=0$$

имеет единственное решение?

10) При каких значениях параметра a уравнение

$$\sqrt[100]{e^{\frac{\cos(ax)}{\sqrt{10-|x|}}}}=\sqrt[100]{\pi^{a(\sin^2 x+\cos^2 x)\,-\,a}}$$

имеет 8 решений?

11) При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases}|y|=|\ln|x||\\ ax-y=0\end{cases}$$

имеет 6 решений?

12) При каких значениях параметра a уравнение

$$(|a|-|\sin|x||)(4x^2+4a^2-4\pi|x|+\pi^2-1)=0$$

имеет 8 решений на отрезке $[-\pi;\pi]$?

13) При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y+a)^2+z^2=a^2\\ a+x=3y-z\end{cases}$$

имеет единственное решение?

14) При каких значениях параметра a уравнение

$$(4x^2+4a^2-8|x|-8|y|+3)(x^2+a^2-2|x|-2|y|+1{,}875)=0$$

имеет чётное ненулевое количество решений?

15) При каких значениях параметра a уравнение

$$\pi^{\sin(x^2+ax)-\sin(1-a^2-ax)} = \pi^{2\cos(1-a^2-ax)-2\cos(x^2+ax)}$$

имеет единственное решение на отрезке $\left[-\frac{5}{2}; \frac{1}{4}\right]$?

16) При каких значениях параметра θ уравнение

$$\log_3 14337 - \log_3 177 - \ln e^{\left(e^{2\theta x^2 - x^4 - \theta^2}\right)} + 2^{100} + \theta^2 =$$

$$2\theta|x| + \ln e^{105} + \operatorname{tg}(e^0 x - x) - x^2 + 2^{100} - \pi^{\log_\pi 102}$$

имеет решения?

17) На координатной плоскости заданы точки

$$A(a; a), B(a+6; 7a-3), C(9a+2, 3a^2-1)$$

При каких значениях параметра a все три точки будут лежать на одной прямой?

18) На координатной плоскости заданы точки

$$A(a; a), B(a; 8), C(a+7, a+7) \text{ и } D(a+3; a-1)$$

При каких значениях параметра a вокруг четырёхугольника ABCD можно будет описать окружность радиусом 5?

19) При каких значениях параметра f площадь фигуры, заданной уравнением

$$\frac{|10x+10| + |10-5y| + |5y+f-10x-20| - f}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}} = 0$$

равна 7?

20.1*) Пусть задано евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ с множеством из расположенных в нём $2n$ векторов вида $(1; 1; \ldots; 1)$, где $n \in \mathbb{N}$. Случайную половину векторов умножают на -1, все остальные – на 2. При каких размерностях пространства сумма длин всех векторов в пространстве будет больше суммы всевозможных скалярных произведений пар векторов в пространстве ровно на $3n\sqrt{n}$?

20.2*) Пусть задано евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ с множеством из расположенных в нём $2n$ векторов вида $(1; 1; \ldots; 1)$, где $n \in \mathbb{N}$. Случайную половину векторов умножают на -1, все остальные – на 2. При каких размерностях пространства сумма длин всех векторов в пространстве будет больше суммы всевозможных скалярных произведений пар векторов в пространстве?

21) Найдите все такие значения параметра k, для которых найдётся хотя бы одна такая функция $f(x)$, для которой при любых x верно тождество:

$$f^2(x) - 4k \cdot f(x) = k^2 - 2$$

22.1) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых при любых действительных σ уравнение

$$2a \sin ax + a \cos ax + 2ax = \sigma$$

имеет единственное решение.

22.2) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых при любых действительных σ уравнение

$$2a \cos ax + a \sin ax + 4ax = \sigma$$

имеет единственное решение.

23.1) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых функция

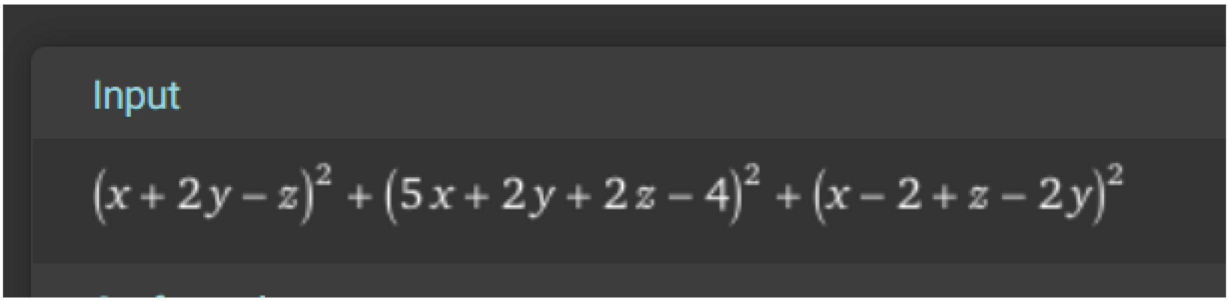
$$f(x, y) = 2xy + 2a^2 + 2x^2 + 2y^2 - 2ax - 2ay + 1$$

принимает своё наименьшее значение.

23.2**** ГРОБ) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых функция

$$f(x, y) = 27x^2 + 20xy + 20ax - 44x + 12y^2 - 8y + 6a^2 - 20a + 20$$

принимает своё наименьшее значение.



24) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$\pi^{-0.5x^2+ax-0.5a^2-1.5-2ax-a\sqrt{3}-x\sqrt{3}} - e^{\ln 4} \geq e^{a^2-ax-2\sqrt{2}x+x^2-ax+2\sqrt{2}a+2} - \pi^{\log_{\sqrt{\pi}} 2}$$

имеет решения.

25) При каких значениях параметра a уравнение

$$a^3x - 5x - 4a^5 - ax - 46a^3 + 5a^2x - a^6 - 4a^4 + 5a^2 + 50a = 0$$

имеет одно решение?

26.1) При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} \sin(x-y) = 0 \\ (x+a)^2 + (y-a)^2 = \dfrac{\pi^2}{9} - a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

26.2) При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} \cos(x-y) = 0 \\ (x-a)^2 + (y+a)^2 = \dfrac{\pi^2}{4} - a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

27.1) При каких значениях параметра a уравнение

$$(|x^2 - 3|x|| - a)(x^2 - |x| - |x||a| + |a|) = 0$$

имеет 10 решений?

27.2) При каких значениях параметра a уравнение

$$(|a^2 - 3|a|| - x)(a^2 - |a| - |a||x| + |x|) = 0$$

имеет нечётное количество решений?

28) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых при любых действительных $\sigma \in [-5; 5]$ уравнение

$$8x + 7|x - a - 1| - |x - a + 1| = \sigma$$

имеет единственное решение.

29) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$e^{\frac{2x}{1+x^2}} = \frac{1}{a}\ln a$$

имеет решение.

30*) Найдите все целые значения параметра n, при каждом из которых уравнение

$$F_n x^2 + F_{n+1} x + F_{n+2} = 0$$

имеет решения, если F_n – последовательность Фибоначчи, заданная следующим образом:

$$F_1 = F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Решение *https://chat.deepseek.com/share/37mcbsspalihgxmeig*

31) При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} (x^2 - 2xy + x + y^2 - y)(4x^2 + 4xy - 2x + y^2 - y) = 0 \\ 4x^2 + 2y^2 + 1 = a^2 + 4y - 2y^2 \end{cases}$$

имеет два решения?